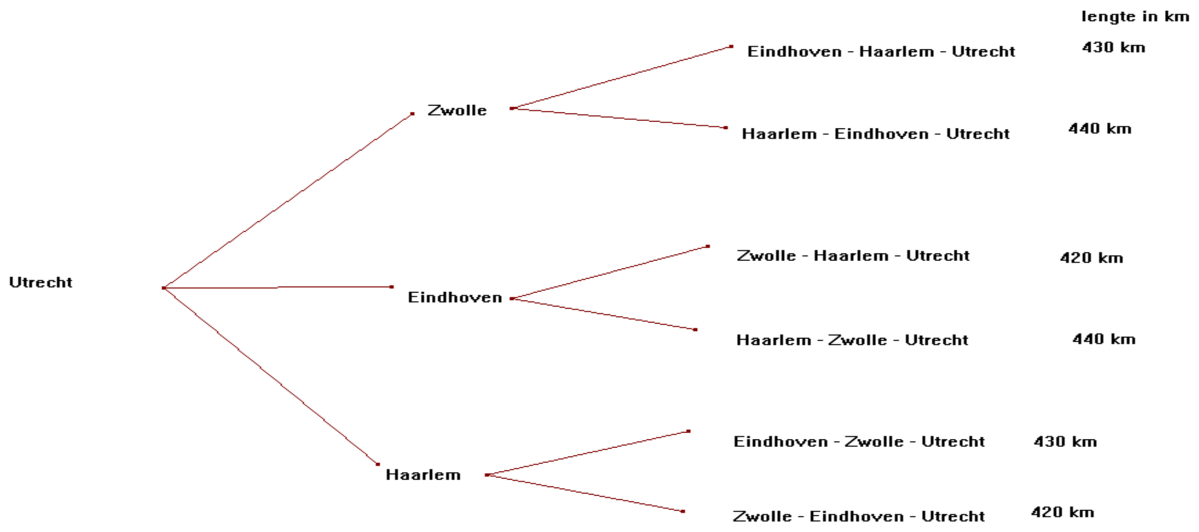
Uitwerkingen hoofdstuk K deel A3 Grafen en Matrices

1.

a. Er zijn 3 . 2 . 1 = 6 rondritten mogelijk. Iedere keer 2 ritten met dezelfde lengte vanwege de mogelijkheid van de omgekeerde richting.

b.



De kortste ritten zijn : U – E – Z – H – U en omgekeerd.

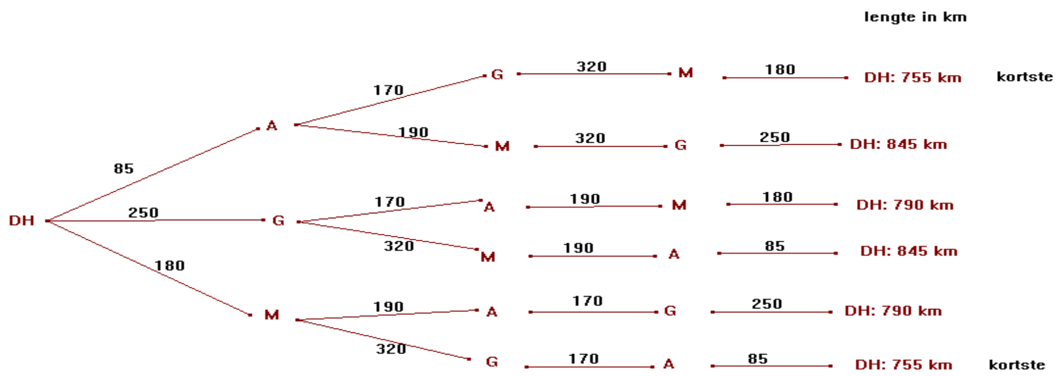
2. De grafen b en d zijn gelijkwaardig. Er zijn 4 punten waar 3 wegen eindigen en 1 punt waar 4 wegen eindigen. De vorm doet er niet toe.

3.

a. Er zijn 3 . 2 . 1 = 6 rondritten mogelijk.

b. Je kunt bij een bepaalde route ook steeds de omgekeerde richting nemen.

c.



Het advies wordt de route DH – A – G – M – DH of omgekeerde richting.

4.

a. Vanuit een willekeurig punt zijn er 24 mogelijkheden , vervolgens 23 mogelijkheden enz. $\Rightarrow$ in totaal zijn er 24! $\approx 6{,}2 \cdot 10^{23}$ routes mogelijk.

b. 1 seconde , dan nodig 1 miljard = 10^9 routes $\Rightarrow$ het aantal seconden dat nodig is:
$6{,}2 \cdot 10^{23} : 10^9 = 6{,}2 \cdot 10^{14}$ In een jaar zitten 365 . 24 . 60 . 60 = 31536000 seconden $\Rightarrow$
De computer heeft dan nodig :

$$\frac{6{,}20.10^{14}}{315536000} \approx 20 \text{ miljoen jaar}$$

5.

a. Nijmegen – Roermond afstand is : 61 + 23 = 84 km
De afstand in minuten is dan : 29 + 21 + 17 + 14 = 81 min en niet 56 + 27 = 83 min.

b. Natuurlijk de gemaakte kosten per rit.

6.

a. De afstand Amersfoort – Assen is : 71 + 74 = 145 km Heen en terug komt dat op 290 km .
Twee keer per week wordt dat dus 2 . 290 = 580 km.
De afstand Zwolle – Amersfoort heen en terug en 1 keer per week is 1 * 2 * 71 = 142 km
De afstand Zwolle – Groningen heen en terug en 2 keer per week is : 2 * 2 * 104 = 416 km

b. naar

$$\begin{array}{c} \\ AM \\ AP \\ As \\ Gr \end{array}
\begin{array}{c} \text{afstand per week van} \\ \begin{array}{ccccc} AM & AP & AS & Gr & ZW \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 86 & 290 & 350 & 142 \\ 86 & 0 & 236 & 296 & 88 \\ 580 & 472 & 0 & 120 & 296 \\ 700 & 592 & 120 & 0 & 416 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

c. Vanuit Assen legt de transportwagen per week af: 290 + 236 + 120 = 646 km

d. Deze methode passen we toe vanuit iedere plaats dan komen we op het volgende :
vanuit Amersfoort : 0 + 86 + 580 + 700 = 1366 km
vanuit Apeldoorn: 86 + 0 + 472 + 592 = 1150 km
vanuit Assen : 646 km
vanuit Groningen: 350 + 296 + 120 +0 = 766 km
vanuit Zwolle: 142 + 88 +120 +416 = 766 km
$\Rightarrow$ de kleinste afstand wordt afgelegd vanuit Assen.

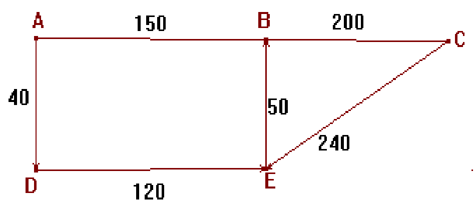
e. van Am. naar Am. – Ap. is 2 . 43 = 86 km ;
van Am. naar As. – Gr. is (71 + 74 + 30) * 2 = 175 . 2 = 350 km
van Gr. naar AM-AP is 30 + 74 + 71 + 43 + 44 + 74 + 30 = 366 km enz. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll}
 & \text{van centraal magazijn} \\
 & \begin{array}{ccccc} AM & AP & AS & GR & ZW \end{array} \\
\text{naar vestigingen} \quad \begin{array}{r} AM-AP \\ AS-GR \end{array} & \begin{pmatrix} 86 & 86 & 306 & 366 & 158 \\ 350 & 296 & 60 & 60 & 208 \end{pmatrix} = N
\end{array}$$

f. Het meest geschikt zijn op deze manier Assen en Zwolle met ieder een totaal van 366 transportkilometers.

7.

a.



b. De afstand van A naar D is 40 km ; De afstand van D naar A is 120 + 50 + 150 = 320 km

$$\begin{array}{ll}
 & \text{van} \\
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\text{naar} \quad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 150 & 350 & 320 & 200 \\ 150 & 0 & 200 & 170 & 50 \\ 350 & 200 & 0 & 370 & 250 \\ 40 & 190 & 390 & 0 & 240 \\ 160 & 310 & 240 & 120 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

c. D.w.z. dat de gespiegelde getallen t.o.v. de hoofddiagonaal niet allemaal gelijk zijn.

8.

a. Bijv. van Lyon naar Beaune is er een rechtstreekse verbinding en van bijv. Lyon naar Dijon is er geen rechtstreekse verbinding.

b. Er zijn 5 plaatsen met steeds een rechtstreekse verbinding $\Rightarrow \binom{5}{2} = 10$ verbindingen.

c. Dan zijn er minimaal 4 verbindingen.

9.

a.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = V \end{array}$$

b. Dan zijn er $\binom{6}{2} = 15$ wegen

c. Er zijn dan 6 – 1 = 5 wegen.

10.

a. Maximale verbondenheid $\Rightarrow \binom{n}{2}$ wegen

b. De matrix bestaat dan uit allemaal enen behalve op de hoofddiagonaal.

c. Dan zijn er n – 1 wegen.

11.

a.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = V \end{array}$$

b. Het grootste getal is 3.

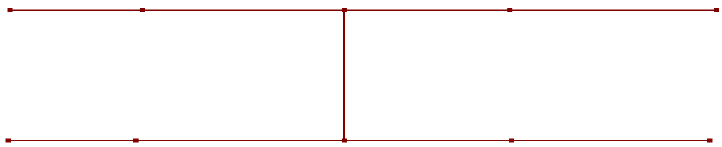
c. rij A : 8 ; rij B : 9 ; rij C : 11 ; rij D : 9 ; rij E : 7 ; rij F : 8
Hoe kleiner het getal des te beter is de bereikbaarheid, want er zijn dan minder wegen nodig om de plaats te bereiken.
De rangschikking wordt dan : E ; A en F ; B en D ; C.

12.

a. De maximale diameter krijg je in geval de graaf er als volgt uitziet:

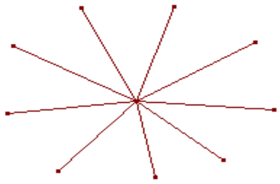
De maximale diameter is dus 9.

b.

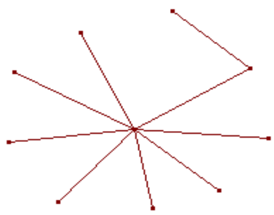


Lastig te vinden.

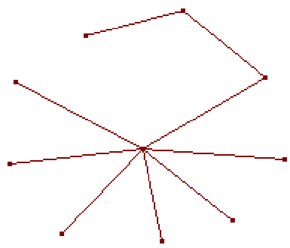
c. Diameter 2 $\Rightarrow$



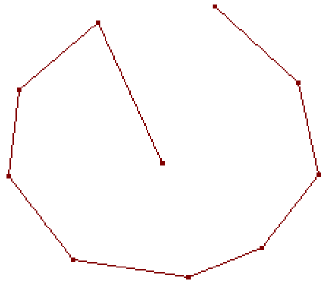
diameter 3 $\Rightarrow$



diameter 4 $\Rightarrow$

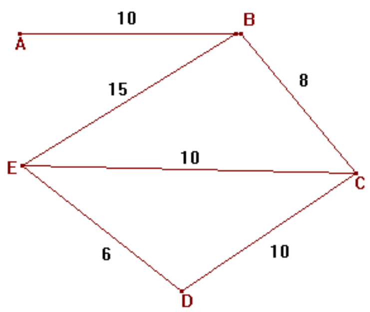


Dit gaat steeds door $\Rightarrow$ De diameter kan de waarden 2 t/m 9 krijgen.
De laatste mogelijkheid is bijv.



13.

a. Eerst de graaf tekenen en verwerk de gegeven getallen. Van A naar E is het 25 km $\Rightarrow$ van B naar E is het dus 25 – 10 = 15 km
Van A naar C is het 10 + 8 = 18 km



Van A naar D is het 10 + 8 + 10 = 28 km enz.
Wel even nagaan dat de kortste afstand genomen wordt.
De matrix wordt dan :

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 18 & 28 & 25 \\ 10 & 0 & 8 & 18 & 15 \\ 18 & 8 & 0 & 10 & 10 \\ 28 & 18 & 10 & 0 & 6 \\ 25 & 15 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

b. Tel de getallen op bij iedere rij dan krijgen we totale afstanden die de ziekenwagen moet afleggen om elke plaats te bereiken. ⇒
Die aantallen zijn dan van boven naar beneden : 81 ; 51 ; 46 ; 62 en 56 ⇒ de totale afstand naar C is het minst ⇒ het ziekenhuis komt dus in C.

14.

a.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \textit{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{V} \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \textit{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 13 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 19 & 11 & 13 \\ 9 & 3 & 0 & 14 & 10 \\ 5 & 11 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 10 & 17 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

c. Naar B : 6 + 19 + 11 + 13 = 49 km ; Vanuit B : 6 + 3 + 11 + 10 = 30 km ; totaal 79 km

d. Naar A : 6 + 13 + 5 + 7 = 31 km ; Vanuit A : 6 + 9 + 5 + 4 = 24 km ; totaal 55 km
Naar C : 9 + 3 + 14 + 10 = 36 km ; Vanuit C : 13 + 19 + 8 + 17 = 57 km ; totaal 93 km
Naar D : 5 + 11 + 8 + 2 = 26 km ; Vanuit D : 5 + 11 + 14 + 9 = 39 km ; totaal 65 km
Naar E : 4 + 10 + 17 + 9 = 40 km ; Vanuit E : 7 + 13 + 10 + 2 = 32 km ; totaal 72 km
Als we alles vergelijken dan moet de bijeenkomst gehouden worden in plaats A.

15.

a.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ \textit{naar}\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = W \end{array}$$

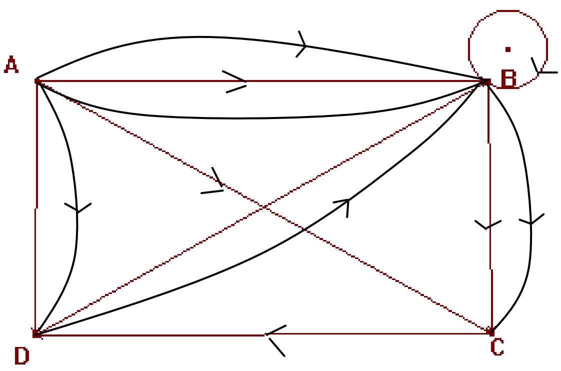
b.

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ \textit{naar}\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{V} \end{array}$$

c. De diameter is 4 , want er zijn 4 stappen nodig om van D naar A te gaan.

16.

a.



b. Op alle plaatsen waar in de gegeven matrix getallen staan ongelijk aan 0 moet nu een 1 komen , op alle overige plaatsen een 0. $\Rightarrow$

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \textit{naar} \begin{array}{r} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{V} \end{array}$$

c. Ja dat kan altijd door de getallen ongelijk aan 0 door 1.
Omgekeerd kan niet ,want je weet niet door welk getal je de enen moet vervangen. Dat bepaald het aantal wegen van de ene naar de andere plaats.

17.

a. $M_{totaal} = M_1 + M_2 \Rightarrow M_{totaal} = \begin{array}{c} \\ \text{fil 1} \\ \text{fil 2} \\ \text{fil 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 40 & 28 & 29 \\ 33 & 47 & 29 & 21 \\ 36 & 36 & 32 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$

b. 28 + 29 + 32 = 89 Dit stelt het aantal verkochte wasautomaten van type C in de eerste helft van 2004.

c. 40 + 40 + 28 + 29 = 137 Dit stelt het totaal aantal verkochte wasautomaten van filiaal 1 voor in de eerste helft van 2004.

18.

a. A is 2 x 2 B is 2 x 3 C is 4 x 1 D is 3 x 3 E is 2 x 4 F is 1 x 3

b. A en D zijn vierkante matrices.
A: som op hoofddiagonaal is 3 ; D: som op hoofddiagonaal is 10

c. $a_{21} = 1$; $b_{21} = 4$; c_{14} kan niet ; $d_{31} = 6$; $e_{24} = 6$ en $f_{12} = 1$

19.

a. $\begin{array}{c} \\ \textit{Cosmo} \\ \textit{Nijendijk} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & LX & SLX & Dsl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = V_1$

b. $\begin{array}{c} \\ \textit{Cosmo} \\ \textit{Nijendijk} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & LX & SLX & Dsl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = V_2$

c. $\begin{array}{c} \\ \textit{Cosmo} \\ \textit{Nijendijk} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & LX & SLX & Dsl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 11 & 11 & 8 \\ 0 & 12 & 12 & 5 \end{pmatrix} \end{array} = V$

d.

$\begin{array}{c} \\ \text{mei} \\ \text{juni} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & LX & SLX & Dsl \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 14 & 7 & 7 \\ 1 & 9 & 16 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = T$

e. Deze som geeft het totale aantal auto’s aan van uitvoering LX die in de maanden mei en juni verkocht zijn in de bedrijven Cosmo en Nijendijk.

20.

a. $P = \begin{array}{c} QE \\ TS \\ LT \\ SX \end{array} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,2 \\ 1,6 \\ 2,0 \end{pmatrix}$ in duizenden euro's.

b. zaak A ontvangt: 8 . 0,8 + 6 . 1,2 + 4 . 1,6 + 3 . 2,0 = 26 .1000 = 26000 euro
zaak B ontvangt: 6 . 0,8 + 3 . 1,2 + 0 . 1,6 + 5 . 2,0 = 18,4 . 1000 = 18400 euro

c. $I = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 26 \\ 18,4 \end{pmatrix}$

21.

a. A . B = $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1+3.2 \\ 1.1+1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. A.C kan niet.

c. C . B = (3.1 + 0.2) = (3)

d. D . B = $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1+-4.2 \\ 3.1+2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

e. AB + DB = $\begin{pmatrix} 6+-3 \\ 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

f. 2A . B = $2.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1+6.2 \\ 2.1+2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

22.

a. Neem T = $\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

b. V = P . T = $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.7+8.8 \\ 5.7+4.8 \\ 4.7+2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 67 \\ 44 \end{pmatrix} \Rightarrow$ V= $\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 10 \end{array} \begin{pmatrix} 106 \\ 67 \\ 44 \end{pmatrix}$

Deze matrix geeft de aantallen fietsen aan die per dag gemaakt worden met 3 , 5 en 10 versnellingen.

c. W . V = (1 . 106 + 1 . 67 + 1 . 44) = (217)
Dit is het totaal aantal gemaakte fietsen per dag.

23. De bedragen zijn in honderden euro's.

a. zaak A:
computers: 8 . 8 + 6 . 12 + 4 . 16 + 3 . 20 = 260
winst: 8 . 1 + 6 . 2 + 4 . 4 + 3 . 5 = 51
software: 8 . 1 + 6 . 1 + 4 . 3 + 3 . 4 = 38

zaak B:
computers: 6 . 8 + 3 . 12 + 0 . 16 + 5 . 20 = 184
winst: 6 . 1 + 3 . 2 + 0 . 4 + 5 . 5 = 37
software: 6 . 1 + 3 . 1 + 0 . 3 + 5 . 4 = 29

b.
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c} \text{prijs} \quad \text{winst} \quad \text{software} \\ \begin{pmatrix} 260 & 51 & 38 \\ 184 & 37 & 29 \end{pmatrix} \end{array}$$

24.

a. $P . Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3+3.0+5.1 & 1.1+3.1+5.2 \\ 0.3+2.0+1.1 & 0.1+2.1+1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b. P . R kan niet

c. $R . P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+0.0 & 2.3+0.2 & 2.5+0.1 \\ 1.1+1.0 & 1.3+1.2 & 1.5+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

d. $S.R = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+5.1 & 1.0+5.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix}$

e. $R.R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+0.1 & 2.0+0.1 \\ 1.2+1.1 & 1.0+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

f. $Q.P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1+1.0 & 3.3+1.2 & 3.5+1.1 \\ 0.1+1.0 & 0.3+1.2 & 0.5+1.1 \\ 1.1+2.0 & 1.3+2.2 & 1.5+2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 16 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

25.

a.
$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \text{inkoop} \quad \text{verkoop} \\ \begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 275 & 400 \\ 600 & 800 \\ 900 & 1200 \end{pmatrix} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{c} \\ \text{fil 1} \\ \text{fil 2} \\ \text{fil 3} \end{array}\begin{array}{c} \text{inkoop} \quad \text{verkoop} \\ \begin{pmatrix} 15700 & 21000 \\ 9800 & 13100 \\ 10800 & 14400 \end{pmatrix} \end{array}$$

t_{21} geeft het totale inkoopbedrag van filiaal 2.

c. We moeten Q . T berekenen ⇒ Q moet dus 3 kolommen hebben ⇒ Q = (1 1 1)

$$\Rightarrow Q\,.\,T = \begin{array}{cc} \text{inkoop} & \text{verkoop} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 36300 & 48500 \end{pmatrix}} \end{array}$$

d. De totale winst is dus 48500 – 36300 = 12200 euro

26.

a. $$K = \begin{array}{c|c} & \text{kosten} \\ P & \\ Q & \\ R & \\ T & \end{array}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$$

b. $$N = \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1000 & 600 & 800 \end{pmatrix}} \end{array}$$

c. $$M.K = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.10+4.8+5.15+5.40 \\ 3.10+2.8+3.15+8.40 \\ 1.10+3.8+5.15+4.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 327 \\ 411 \\ 269 \end{pmatrix}$$

Deze getallen geven de productiekosten van de producten A , B en C .

d. $$N\,.\,M = \begin{pmatrix} 1000 & 600 & 800 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 & 7600 & 10800 & 13000 \end{pmatrix}$$

De getallen in N . M geven de hoeveelheden grondstoffen en arbeidstijd die nodig is voor een bestelling.

e. $$N.M.K = \begin{pmatrix} 4600 & 7600 & 10800 & 13000 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 788800 \end{pmatrix}$$

Dit getal geeft de productiekosten voor de totale bestelling.

27. a. $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ want de vermenigvuldiging met R geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 8 & 13 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0+3.0+4.0+8.1+7.0 \\ 0.0+2.0+10.0+11.1+5.0 \\ 1.0+1.0+8.0+13.1+7.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$ en dit is het aantal zevens in de drie klassen.

b. $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

e. E = (1 1 1)

28.

a. P . M = 3 . M $\Rightarrow$ elk element van M wordt vermenigvuldigd met 3. $\Rightarrow$

$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ want $P.M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$

b. De eerste rij van M verandert niet $\Rightarrow$ de eerste rij van Q wordt (1 0 0).
De tweede van M wordt drie keer zoveel $\Rightarrow$ de tweede rij van Q wordt (0 3 0)
De derde rij van M moet met 0 vermenigvuldigd worden $\Rightarrow$ de 3^{e} rij wordt (0 0 0)

$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Nu moet gelden : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} .R = \begin{pmatrix} a+b & 2c & b \\ d+e & 2f & e \\ g+h & 2i & h \end{pmatrix}$

Het is wat puzzelen bijv. het eerste getal moet a + b worden dus de eerste kolom van R moet worden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enz. Goed kijken naar de rijen van M en de kolommen van R.

We krijgen uiteindelijk voor R : R = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

29.

a. A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

30.

a. P . Q = $\begin{pmatrix} 26 & 19 & 54 \\ 16 & 14 & 33 \end{pmatrix}$

b. R . P = $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 17 \\ 15 & 1 & 22 \end{pmatrix}$

c. 3P + P.Q^4 = $\begin{pmatrix} 44007 & 37608 & 105318 \\ 27918 & 23802 & 66828 \end{pmatrix}$

d. P^3 kan niet , omdat P geen vierkante matrix is.

e. $Q^4 - R^5$ kan ook niet omdat deze twee matrices niet van elkaar afgetrokken kunnen worden. De grootte is namelijk niet gelijk.

f. R^3 . P + 5 . P = $\begin{pmatrix} 459 & 43 & 667 \\ 691 & 55 & 1009 \end{pmatrix}$

31.

a. T en G invoeren in GR met de optie van matrix vinden we :

$$K = T \,.\, G = \begin{array}{l} \\ \text{camping 1} \\ \text{camping 2} \\ \text{camping 3} \\ \text{camping 4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & \quad E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 28{,}95 & 19{,}85 \\ 38{,}60 & 23{,}60 \\ 20{,}30 & 12{,}85 \\ 21{,}80 & 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. k_{21} geeft het bedrag aan dat de familie Vrielink kwijt is aan camping 2 per dag.

c. Voor de familie Vrielink is de camping 3 het goedkoopst. Voor de familie Eijssink is camping 3 ook het goedkoopst.

d. F geeft het bedrag aan die iedere familie kwijt is als ze een week op iedere camping gestaan zouden hebben.

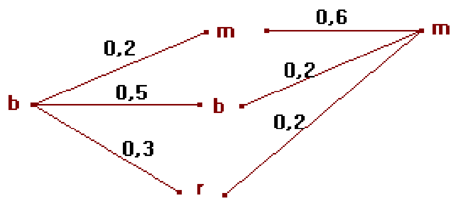
32.

a. De elementen e_{12} en e_{21} hebben geen betekenis omdat je dan prijzen en voorraad van verschillende merken met elkaar vermenigvuldigd.

b. $e_{11} = 600 \,.\, 12 + 2250 \,.\, 18 + 3500 \,.\, 10 = 82700$
$e_{22} = 750 \,.\, 8 + 2500 \,.\, 15 + 3100 \,.\, 20 = 105500$
e_{11} is de waarde in euro's van de televisies van merk A die in voorraad zijn.
e_{22} is de waarde in euro's van de televisies van merk B die in voorraad zijn.

c. Alleen de hoofddiagonaal heeft van V . P betekenis. Bij de andere elementen vermenigvuldig je weer prijzen en voorraad van verschillende merken.

33. De gevraagde kans is:
$0{,}2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}5 \,.\, 0{,}2 + 0{,}3 \,.\, 0{,}2 = 0{,}28$



34.

a. De som is 1 volgens de somregel van de kanstheorie. De kansen op een rij hebben niks met elkaar te maken.

b. In voeren in GR met de optie matrix vinden we :

$$W^2 = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ m \\ b \\ r \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} m & \quad b & \quad r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}28 & 0{,}28 \\ 0{,}36 & 0{,}40 & 0{,}36 \\ 0{,}20 & 0{,}32 & 0{,}36 \end{pmatrix} \end{array}$$

c. w_{31} van W^2 is de kans dat bij vandaag mooi weer het over twee dagen zal regenen.

d. Van regenen naar over 2 dagen mooi weer. Dat is het element w_{13} van $W^2 \Rightarrow p = 0{,}28$

e. Via GR vinden we :

$$W^3 = \text{naar} \begin{array}{c} \\ m \\ b \\ r \end{array} \overset{\text{van}}{\begin{array}{ccc} m & b & r \\ \end{array}} \begin{pmatrix} 0{,}376 & 0{,}312 & 0{,}312 \\ 0{,}372 & 0{,}380 & 0{,}372 \\ 0{,}252 & 0{,}308 & 0{,}316 \end{pmatrix}$$

w_{23} in W^3 geeft aan de kans dat het op een dag regent en dat het dan drie dagen later bewolkt is.

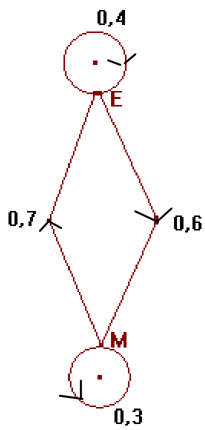
f. Dat is het element w_{33} in $W^3 \Rightarrow$ die kans is dus 0,316.

g. De eerste rij zal getallen geven in de buurt van 1 , terwijl de overige getallen in de matrix in de buurt zullen liggen van de nul. M.a.w. de kans naar mooi weer is nagenoeg 1 en de kans naar minder weer is bijna 0.

35.

a.

$$P = \text{naar} \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\text{van}} \\ & M & E \\ M & 0{,}3 & 0{,}6 \\ E & 0{,}7 & 0{,}4 \end{array}$$



b. Met GR met de optie matrix vinden we :

$$P^2 = \text{naar} \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\text{van}} \\ & M & E \\ M & 0{,}51 & 0{,}42 \\ E & 0{,}49 & 0{,}58 \end{array} \qquad P^3 = \text{naar} \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\text{van}} \\ & M & E \\ M & 0{,}447 & 0{,}474 \\ E & 0{,}553 & 0{,}526 \end{array}$$

c. Van hoofdstuk 1 naar hoofdstuk 3 $\Rightarrow$ we kijken dan in de matrix van P^2 bij het element $p_{21} \Rightarrow$ de kans is 0,49.

d. Van 3 naar 6 $\Rightarrow$ kijken in P^3 naar het element p_{12} dus van eenvoudig naar moeilijk. De kans is dan 0,474.

36.

a.

$$T = \text{naar} \begin{array}{c|ccc} & \multicolumn{3}{c}{\textit{van}} \\ & K & M & S \\ K & 0{,}17 & 0{,}52 & 0{,}25 \\ M & 0{,}70 & 0{,}27 & 0{,}75 \\ S & 0{,}13 & 0{,}21 & 0 \end{array}$$

t_{22} Dit getal is de kans dat na een medeklinker weer een medeklinker komt.

b. Voer de matrix T in in de GR. Met de optie matrix vinden we :

$$T^3 = \text{naar} \begin{array}{c} \\ K \\ M \\ S \end{array} \begin{array}{c} \textit{van} \\ \begin{array}{ccc} K & M & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,325 & 0,388 & 0,317 \\ 0,534 & 0,451 & 0,547 \\ 0,140 & 0,161 & 0,136 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nu geeft het element t_{22} de kans aan dat er 3 plaatsen na een medeklinker weer een medeklinker komt.

38.

a.

$$V = \text{naar} \begin{array}{c} \\ A \\ R \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} A & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}01 \\ 0{,}07 & 0{,}99 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Na 15 jaar hebben we te maken met de matrix V^3 . B met $B = \begin{array}{c} A \\ R \end{array} \begin{pmatrix} 200000 \\ 50000 \end{pmatrix}$

Met GR vinden we : $V^3.M \approx \begin{array}{c} A \\ R \end{array} \begin{pmatrix} 162650 \\ 87350 \end{pmatrix} \Rightarrow$ de randgemeenten hebben ongeveer 87350 inwoners.

39.

a. Met de GR berekenen we $W^2 \Rightarrow$ het gevraagde element is $w_{11} = 0{,}8162 \Rightarrow 81{,}6$ %

b. Met GR berekenen we : W^4 . K met $K = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow W^4.K = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 33{,}9 \\ 24{,}9 \\ 41{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ de procentuele verdeling is dan : A 33,9 % ; B 24,9 % en C 41,2 %.

c. We hebben nodig de elementen w_{11} ; w_{22} en w_{33} van de matrix $W^2 \Rightarrow$
$0{,}8162 \cdot 30 + 0{,}7245 \cdot 40 + 0{,}8691 \cdot 30 = 79{,}539 \Rightarrow 79{,}5$ %

d. De elementen in de derde rij van C worden groter. Een voorbeeld is:

$$W = \text{naar} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}02 & 0{,}04 \\ 0{,}01 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}19 & 0{,}38 & 0{,}96 \end{pmatrix} \end{array}$$

40.

a.

$$T = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \text{plat} \\ \text{stad} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} \text{plat} & \text{stad} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}95 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Nu een keer via de gegeven matrix i.p.v. via de matrix T^2 met element t_{22}.

P(stad naar stad over 10 j.) = P(s-s , s-s) + P(s-p,p-s) = 0,95 . 0,95 + 0,05 . 0,1 = 0,9075

c. Bevolking over 15 jaar $\Rightarrow$ te berekenen via de GR : $T^3 . B$ met $B = \begin{array}{c} plat \\ stad \end{array} \begin{pmatrix} 200000 \\ 300000 \end{pmatrix}$

$$T^3.B = \begin{array}{c} \\ \text{plat} \\ \text{stad} \end{array} \begin{array}{c} \text{aantal} \\ \begin{pmatrix} 187137 \\ 312863 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ 187137 wonen er op het platteland en 312863 in de stad.

d. Stel er wonen in 2000 x mensen op het platteland en y mensen in de stad. Dan geldt:

$T.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200000 \\ 300000 \end{pmatrix}$ en er geldt nog : $x + y = 500000$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 0,9x + 0,05y = 200000 \\ 0,1x + 0,95y = 300000 \\ x + y = 500000 \Rightarrow y = 500000 - x \end{cases}$$

de 3^e vergelijking invullen in de 1^e vergelijking $\Rightarrow$

0,9x + 0,05.(500000 – x) = 200000 $\Leftrightarrow$ 0,85x + 25000 = 200000 $\Leftrightarrow$ 0,85x = 175000 $\Leftrightarrow$
x $\approx$ 205882 en y $\approx$ 294118 $\Rightarrow$ De stad had ongeveer 294120 inwoners in 2000.

41.

a. P(Ne – Ne) = $\dfrac{55}{80} \approx 0,688$

b. We doen voor de overige elementen hetzelfde $\Rightarrow$

$$V = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \text{Ne} \\ \text{Fr} \\ \text{Sp} \\ \text{el} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} \text{Ne} & \text{Fr} & \text{Sp} & \text{el} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,688 & 0,167 & 0,150 & 0,250 \\ 0,125 & 0,708 & 0,025 & 0,094 \\ 0,062 & 0,067 & 0,625 & 0,156 \\ 0,125 & 0,058 & 0,200 & 0,500 \end{pmatrix} \end{array}$$

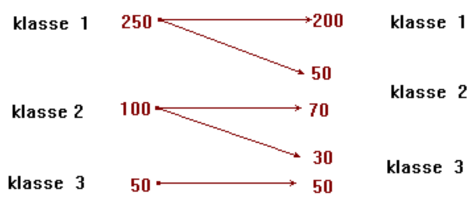
Een paar voorbeelden : v_{12} = 20/120 $\approx$ 0,167 ; v_{33} = 25/40 = 0,625 en v_{34} = 25/160 $\approx$ 0,156

c. GR geeft via de optie matrix: V . B = $V.\begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$ = naar $\begin{array}{c} \text{Ne} \\ \text{Fr} \\ \text{Sp} \\ \text{el} \end{array} \begin{pmatrix} 262 \\ 159 \\ 119 \\ 160 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ komende zomer blijven er 262 werknemers in Nederland en gaan er 159 naar Frankrijk.

d. Zelfde methode maar nu voor V^3 . V met GR geeft 129 weknemers gaan naar Spanje over 3 jaar.

42.

a. Rechts zie je bijv. P(1 – 2) = 50/250 = 0,2 en
P(2 – 2) = 70/100 = 0,7 enz. $\Rightarrow$



$$V = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. We hebben nodig V . B met B = $\begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow V . B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 160 \\ 124 \\ 116 \end{pmatrix} \Rightarrow$

160 bomen in klasse 1 ; 124 bomen in klasse 2 en 116 bomen in klasse 3.

c. Nu hebben we nodig V^5 . B met B = $\begin{pmatrix} 200 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow$ met GR : $V^5 . B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 66 \\ 84 \\ 250 \end{pmatrix} \Rightarrow$

66 bomen in klasse 1 ; 84 bomen in klasse 2 en 250 bomen in klasse 3.

43.

a.

$$M = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Aantallen in de tweede week $\Rightarrow$ nodig: $V_2 = M . V_1$ met $V_1 = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} \Rightarrow$ met GR vinden we:

$V_2 = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 56 \\ 34 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 56 mappen van A en 34 mappen van B.

De 4e week : $V_4 = M^3 . V_1 = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 59{,}36 \\ 30{,}64 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ongeveer 59 mappen van A en 31 mappen B.

De 5e week : $V_5 = M^4 . V_1 = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 59{,}744 \\ 30{,}256 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ongeveer 60 mappen van A en 30 mappen B.

De 6e week : $V_6 = M^5 . V_1 = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 59{,}9 \\ 30{,}1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ongeveer 60 mappen van A en 30 mappen B.

c. Het zal zich stabiliseren naar 60 mappen A en 30 mappen B.

d. Bereken bijv. $V_5 = M^4 . V_1$ en $V_7 = M^6 . V_1$ met $V_1 = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 20 \\ 70 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Ook hier ongeveer 60 mappen van A en 30 mappen B.

44.

a. De overgangsmatrix voor over 5 jaar is:

$$M = \text{naar} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{L} & \text{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{L} \\ \text{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{van})$$

Over 5 jaar hebben we : M . V met V = $\begin{array}{c} \text{L} \\ \text{S} \end{array}\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow$ M . V = $\begin{array}{c} \text{L} \\ \text{S} \end{array}\begin{pmatrix} 58 \\ 52 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 58 leden bij L en 52 leden bij S.

Na 10 jaar: M^2 . V = $\begin{array}{c} \text{L} \\ \text{S} \end{array}\begin{pmatrix} 62 \\ 48 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 62 leden bij L en 48 leden bij S.

b. Bereken bijv. $M^{13} = \begin{pmatrix} 0{,}600 & 0{,}600 \\ 0{,}400 & 0{,}400 \end{pmatrix}$ en $M^{14} = \begin{pmatrix} 0{,}600 & 0{,}600 \\ 0{,}400 & 0{,}400 \end{pmatrix} \Rightarrow$
Op den duur zal Lenig 0,600 . 110 = 66 leden hebben en Souplesse heeft dan 0,400 . 110 = 44 leden.

48.

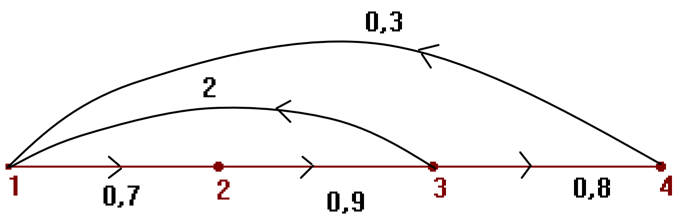
a. Er is geen klasse boven de 4 jaar.
Pijl van klasse 4 naar klasse 1 met 1000 erbij.
Dit is de enige pijl naar klasse 1.

b. Men wordt steeds 1 jaar ouder en komt dan in een volgende klasse. (elke klasse duurt 1 jaar)

c. Klasse 3: 0,6 . 500 = 300 vissen op 1 juni 2007
Klasse 4: 0,8 . 300 = 240 vissen op 1 juni 2009
Aantal nakomelingen op 1 juni 2009 zal zijn : 240 . 1000 = 240000

49.

a.



b.

$$L = \text{naar} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (\text{van})$$

c. Bereken met GR de matrix L .P met P = $\begin{pmatrix} 1000 \\ 630 \\ 510 \\ 370 \end{pmatrix} \Rightarrow$ L.P = $\begin{pmatrix} 1131 \\ 700 \\ 567 \\ 408 \end{pmatrix} \Rightarrow$

1131 dieren van klasse 1 ; 700 dieren van klasse 2 ; 567 van klasse 3 en 408 uit klasse 4.
Op dezelfde manier krijgen we :

L^2. M = $\begin{pmatrix} 1256 \\ 792 \\ 630 \\ 454 \end{pmatrix}$ en L^3.M = $\begin{pmatrix} 1396 \\ 879 \\ 713 \\ 504 \end{pmatrix}$ De aantallen dus na 2 en 3 jaar.

Dit geeft na 2 jaar : 1256 uit 1 ; 792 uit 2 ; 630 uit 3 en 454 uit 4.
En na 3 jaar : 1396 uit 1 ; 879 uit 2 ; 713 uit 3 en 504 uit 4.

d. Bereken eerst de totalen per jaar ⇒
Begin: 2510 ; 1[e] jaar: 2806 ; 2[e] jaar: 3132 en 3[e] jaar: 3492
Bij een exponentiële groei moeten de groeifactoren bij benadering hetzelfde zijn:
$\frac{2806}{2510} \approx 1{,}118$; $\frac{3132}{2806} \approx 1{,}116$ en $\frac{3492}{3132} \approx 1{,}115 \Rightarrow$ ongeveer gelijk ⇒ exp. groei.

e. De beginhoeveelheid is 2510 en de groeifactor ongeveer 1,12 ⇒ $N = 2510 \;.\; 1{,}12^t$

f. Los op : $2510 \;.\; 1{,}12^t = 10000 \Leftrightarrow 1{,}12^t \approx 3{,}984.. \Leftrightarrow t = {}^{1,12}\log 3{,}984.. \Leftrightarrow t = \frac{\log 3{,}984..}{\log 1{,}12}$

$\approx 12{,}2 \Rightarrow$ Na ruim 12 jaar zijn er voor het eerst meer dan 10000 dieren.

Opmerking: De vergelijking $2510 \;.\; 1{,}12^t = 10000$ kan natuurlijk ook met de optie intersect opgelost worden met je GR.

50.
a. 7 leeftijdsklassen ⇒ afmeting van L is 7 x 7.

b. l_{21} is niet 0 , want dat is de kans om van het eerste klasse te gaan naar de 2[e] klasse.

c. Het element $l_{5,4}$ is niet nul , want dat is de kans om van de 4[e] klasse te komen in de 5[e] klasse.

d. l_{11} hoeft geen nul te zijn. Dit element geeft aan dat er exemplaren uit 1 ook nakomelingen kunnen hebben.

e. Deze getallen geven het gemiddeld aantal nakomelingen aan per individu uit iedere leeftijdsklasse.

f. Deze getallen zijn geen kansen, de andere getallen wel.

51.

a. l_{32} : de kans om te komen van leeftijdsklasse 5-9 naar leeftijdsklasse 10-14.
l_{12} : dit is het gemiddeld aantal nakomelingen per individu vanuit klasse 5-9.
l_{21} : kans om te komen van leeftijdsklasse 0-4 naar leeftijdsklasse 5-9.
l_{11} : dit is het gemiddeld aantal nakomelingen per individu vanuit klasse 0-4.

b. Voer in in je GR : L en P = $\begin{pmatrix} 1100 \\ 680 \\ 420 \\ 100 \end{pmatrix}$ Bereken L.P = $\begin{pmatrix} 890 \\ 550 \\ 340 \\ 84 \end{pmatrix}$ en L^2 . P = $\begin{pmatrix} 720 \\ 445 \\ 275 \\ 68 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$
Na 5 jaar : klasse 0-4: 890 ; klasse 5-9 : 550 ; klasse 10-14 : 340 en klasse 15-19 : 84
Na 10 jaar:klasse 0-4: 720 ; klasse 5-9 : 445 ; klasse 10-14 : 275 en klasse 15-19 : 68

c. De totalen per leeftijdsklassen zijn :
begin : 2300 ; 5 jaar : 1864 ; 10 jaar: 1508 ; 15 jaar : 1221 ; 20 jaar : 987 en 25 jaar : 799
De groeifactoren zijn : $\frac{1864}{2300} \approx 0{,}81$; $\frac{1508}{1864} \approx 0{,}81$; $\frac{1221}{1508} \approx 0{,}81$; $\frac{987}{1221} \approx 0{,}81$ en tenslotte
$\frac{799}{987} \approx 0{,}81$ De groeifactoren zijn nagenoeg gelijk $\Rightarrow$ er is elke 5 jaar een afname met hetzelfde percentage. Het afnamepercentage is 100% - 81% = 19%

d. Uit c volgt dat het een exponentieel proces is met groeifactor 0,81 en beginhoeveelheid van 2300 $\Rightarrow$ De groeifunctie is: $N = 2300 \cdot 0{,}81^t$ met t in eenheden van 5 jaar.

e. We moeten oplossen $2300 \cdot 0{,}81^t = 400$ Nu een keer met GR.
Voer in $y_1 = 2300 \cdot 0{,}81^x$ en $y_2 = 400$ Neem het window [0 , 10] x [0 , 2500] met intersect vinden we $x \approx 8{,}3 \Rightarrow$ na ongeveer 8,3 . 5 = 42 jaar zijn er voor het eerst minder dan 400 dieren.

52.

a. l_{55} is niet 0 ,want niet iedereen sterft binnen 1 jaar. 80% sterft dus 20% blijft nog in leven $\Rightarrow$
$l_{55} = 0{,}2$
$P(0-1) = \frac{25+35}{48+52} = \frac{60}{100} = 0{,}6$; $P(1-2) = \frac{30+34}{38+42} = \frac{64}{80} = 0{,}8$; $P(2-3) = \frac{17+18}{35+35} = \frac{35}{70} = 0{,}5$
Nu nog even opletten: Van de dieren 9 + 11 = 20 uit de klasse van 4 of groter op t = 0 leven op t = 1 nog 0,2 .20 = 4 dieren $\Rightarrow P(3-4) = \frac{10+10-4}{17+23} = \frac{16}{40} = 0{,}4$

De vruchtbaarheidscijfers zijn gegeven ⇒

$$L = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \geq 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \geq 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1{,}5 & 3 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Op t = 1 geldt P = $\begin{pmatrix} 225 \\ 60 \\ 64 \\ 35 \\ 20 \end{pmatrix}$ Met de GR vinden we weer L.P = $\begin{pmatrix} 201 \\ 135 \\ 48 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$ en L^2.P = $\begin{pmatrix} 168 \\ 121 \\ 108 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix}$ ⇒

Op t = 2 : klasse 0: 201 ; klasse1: 135 ; klasse 2: 48 ; klasse 3: 32 en klasse ≥4 : 18
Op t = 3 : klasse 0: 168 ; klasse1: 121 ; klasse 2: 108 ; klasse 3: 24 en klasse ≥4 : 16.

53.

a. De Lesliematrix wordt:

$$L = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

L invoeren in de GR . Met de optie matrix vinden we :

$$L^4 = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} abcd & 0 & 0 & d \\ 0 & abcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abcd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abcd \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Je kunt in 4 stappen alleen van een klasse naar een zelfde klasse.

c. Voor iedere klasse geldt dat het aantal met *abcd* wordt vermenigvuldigd.

54.

a.

$$L = \text{naar}\ \begin{array}{c} \\ \text{e} \\ \text{l} \\ \text{i} \end{array}\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} \text{e} & \text{l} & \text{i} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Nu een keer L^3 handmatig berekenen: ⇒

$$L.L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en vervolgens :}$$

$$L^2.L = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$$

c. Als de populatie na 3 maanden gelijk blijft dan moet abc gelijk zijn aan 1.

d. Als de populatie na 3 maanden met 20% is toegenomen dan moet abc gelijk zijn aan 1,2.

e. De populatie sterft uit als $abc < 1$.

55.

a 1 jaar worden ⇒ naar klasse 3 ⇒ P = 0,8 . 0,6 = 0,48

b. $P = \begin{pmatrix} 500 \\ 160 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$ De samenstelling op 1 juli 2008 volgt uit : $L^3 . P = \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \\ 240 \\ 60 \end{pmatrix}$ ⇒

klasse 1: 240 ; klasse 2 : 120 ; klasse 3 : 240 en klasse 4: 60 dieren.

c. Stel samenstelling op 1 juli 2006 is : $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow L.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 160 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$10d = 500$; $0,8a = 160$; $0,6b = 60$ en $0,25c = 50$ ⇔

$a = 200$; $b = 100$; $c = 200$ en $d = 50$ ⇒

Op 1 juli 2006 is de samenstelling: klasse 1: 200 ; klasse 2: 100 ; klasse 3: 200 en klasse 4: 50 dieren.

d. L invoeren in GR ⇒

$$L^4 = \text{naar}\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dit wil zeggen dat de populatie steeds na 2 jaar gegroeid is met 20 %.

e. Groeifactor per 2 jaar is 1,2 Nu moet gelden : $770 \cdot 1{,}2^4 \approx 1597$ dieren.

f. Stel $l_{14} = v \Rightarrow 0{,}80 \cdot 0{,}60 \cdot 0{,}25 \cdot v = 1 \Leftrightarrow 0{,}12 \cdot v = 1 \Leftrightarrow v = 0{,}833 \Rightarrow$

$$L = \text{naar} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}833 \\ 0{,}80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

56.

a. $P(80\text{-}100) = 0{,}080 \cdot 0{,}080 = 0{,}0064$

b. Uit de laatste kolom blijkt dat per individu er $0{,}45 + 0{,}69 + 0{,}13 = 1{,}27$ nakomelingen zijn $\Rightarrow$ per gezin is dat dus $2 \cdot 1{,}27 \approx 2{,}5$ kind

c. De Lesliematrix wordt:

$$L = \text{naar} \begin{array}{c} \\ \text{0-9} \\ \text{10-19} \\ \text{20-29} \\ \text{30-39} \\ \text{40-49} \\ \text{50-59} \\ \text{60-69} \\ \text{70-79} \\ \text{80+} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccccccccc} \text{0-9} & \text{10-19} & \text{20-29} & \text{30-39} & \text{40-49} & \text{50-59} & \text{60-69} & \text{70-79} & \text{80+} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0{,}45 & 0{,}69 & 0{,}13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}930 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}987 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}962 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}907 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}761 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}510 & 0{,}080 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voor het jaar 2032 moeten we berekenen:

$$L^5.\begin{pmatrix}205\\258\\169\\127\\99\\74\\48\\23\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}323\\281\\247\\259\\223\\176\\216\\109\\45\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ in 1982 was er een totaal van 1008 en in 2032 een totaal van 1879 $\Rightarrow$

er is dus een groei in 50 jaar van : $\dfrac{1879-1008}{1008}.100\% \approx 86{,}4\%$

d. Verander de getallen van de eerste rij in de Lesliematrix met deze nieuwe getallen.

Nu weer invoeren in GR $\Rightarrow$ samenstelling voor 2032 wordt: $\begin{pmatrix}197\\185\\176\\209\\184\\176\\216\\109\\45\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ het totaal wordt nu in 2032 een aantal van 1879 . De groei wordt nu : $\dfrac{1497-1008}{1008}.100\% \approx 48{,}5\%$

e. Nu weer de eerste rij veranderen en de aantallen berekenen voor 2032 en 2082 $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}41\\47\\65\\100\\98\\176\\216\\109\\45\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}8\\10\\14\\19\\25\\35\\40\\42\\36\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ de totalen voor 2032 en 2082 worden nu: 879 en 229 $\Rightarrow$De bevolking zou ernstig verminderen.

f. Eerst de oude Lesliematrix gebruiken en toepassen op het aantal van 1982 voor 2 perioden van 20 jaar $\Rightarrow L^2 . \begin{pmatrix} 205 \\ 258 \\ 169 \\ 127 \\ 99 \\ 74 \\ 48 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 102 \\ 189 \\ 253 \\ 164 \\ 120 \\ 86 \\ 51 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ In 1982 is er een totaal van 1008 en in 2002 een totaal van 1095.

Nu door het andere beleid de getallen in de Lesliematrix veranderen $\Rightarrow$ 0,28 in 0,41 en 0,22 in 0,59 $\Rightarrow$ Met de GR vinden we:

$L^3 . \begin{pmatrix} 110 \\ 102 \\ 189 \\ 253 \\ 164 \\ 120 \\ 86 \\ 51 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 95 \\ 142 \\ 100 \\ 98 \\ 176 \\ 217 \\ 109 \\ 45 \end{pmatrix}$ en $L^8 . \begin{pmatrix} 110 \\ 102 \\ 189 \\ 253 \\ 164 \\ 120 \\ 86 \\ 51 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 103 \\ 92 \\ 109 \\ 102 \\ 79 \\ 91 \\ 36 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ De totalen in 2032 zijn 1100 en in 2082 een totaal van 807. $\Rightarrow$ Eerst krijgen we een geringe groei en vervolgens een kleine afname.

57.

a. Er zijn 4 klassen van 2 jaar $\Rightarrow$ een baars wordt maximaal 8 jaar.
P(0 – 6) = 0,005 . 0,6 . 0,7 = 0,0021

b. Invoeren in GR de matrix B $\Rightarrow$

$$B^4 = \text{naar} \begin{array}{c|c} & \text{van} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Na 4 keer 2 = 8 jaar blijkt de populatie 2,1 keer zo groot te zijn $\Rightarrow$ de toename is dus 110 %.

c. De groeifactor in 8 jaar is 2,1 $\Rightarrow$ 500 . $2{,}1^3 \approx$ 4631 baarzen.

d. Stel samenstelling op 1 januari 2005 is : P = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow B.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 40 \\ 300 \\ 140 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$1000d = 15000$; $0{,}005a = 40$; $0{,}6b = 300$ en $0{,}7c = 140 \Leftrightarrow$
$a = 8000$; $b = 500$; $c = 200$ en $d = 15 \Rightarrow$ de samenstelling op 1 januari 200 was dus:
klasse 1: 8000 ; klasse 2: 500 ; klasse 3: 200 en klasse 4 15 dieren.

e. Getal b_{14} wordt dan kleiner. Stel $b_{14} = v \Rightarrow v \,.\, 0{,}005 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}7 = 1 \Rightarrow 0{,}0021v = 1 \Leftrightarrow$
$v \approx 476 \Rightarrow$ een baars legt dan gemiddeld 476 eitjes .